

## EL MÉTODO DE POLYA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

FERNANDO GARCÍA FRESNEDA

En este artículo desarrollamos las cuatro fases que propone Polya para resolver un problema y analizamos la utilidad del método que defiende.

Para Polya el proceso de resolución de un problema comprende cuatro fases:

1. **Comprensión del problema.**
2. **Concepción de un plan.**
3. **Ejecución del plan.**
4. **Examen de la solución obtenida.**

La importancia de cada una de estas fases merece que comentemos algunos aspectos de cada una de ellas.

### La comprensión del problema

La comprensión del problema pasa por una correcta interpretación del enunciado.

Si queremos desarrollar en nuestros alumnos y alumnas habilidades y destrezas para la resolución de problemas, una de las facetas en la que debemos insistir será en el análisis de enunciados. ¿Cómo concretarlo? Parece obvio que tendremos que poner problemas en los que lo que más nos interese no sea la búsqueda de la solución, ni la estrategia utilizada, ni la visión retrospectiva final, sino el estudio profundo del enunciado. De forma que sea ésta una etapa de familiarización, exploración, etc. En ella se dan los primeros contactos con el problema: ¿qué se pide?, ¿qué datos nos dan?, ¿de qué trata el problema?, etc. Estas son algunas preguntas que surgen en ese momento.

Un enunciado suele constar de: una o varias preguntas, unos datos que expresan una información relevante y, a veces, una información no relevante.

La relevancia o irrelevancia de la información parte de la pregunta que plantee el problema, por ese motivo lo primero que hay que analizar es la pregunta.

Una vez identificada la información relevante, conviene asegurarse de que ésta no sea contradictoria ("En una granja hay gallinas y conejos. Si en total hay 109 cabezas y 81 patas, ¿cuántos animales hay de cada clase?") o redundante ("En una reunión de chicos y chicas hay 100 cabezas y 200 manos. ¿Cuántas personas hay de cada sexo?").

Al analizar con los alumnos y alumnas algún ejemplo de información redundante, se puede hacer un comentario sobre los tipos de problemas que hay, en función del número de soluciones que tienen. Así como para reflexionar sobre la influencia de un dato o condición en un problema: ¿aumenta el número de soluciones cuando añadimos una condición o dato a un problema o disminuye? Se puede comprobar añadiendo alguna condición al problema de los chicos y las chicas.

A propósito de problemas con solución indeterminada, se puede proponer este conocidísimo problema de incierto origen (¡se le ha llegado a atribuir al mismísimo Einstein!):

## **PROBLEMA.**

### **Las hijas del matemático.**

Un matemático se encontró un día con un amigo y éste le preguntó:

- ¿Cuántas hijas tienes?
- Tres
- Contestó el matemático. -
- ¿Qué edades tienen?
- Preguntó el amigo.
- El producto de sus edades es 36 y la suma de las mismas es el número que tiene el portal de ahí enfrente. El amigo del matemático se volvió y, después de ver el número del portal de enfrente, dijo:
- Para saber las edades de tus hijas, me falta otro dato.
- ¡Perdona, es cierto! -dijo el matemático.
- La mayor toca el piano. ¿Qué edades tenían las hijas del matemático?

**COMENTARIO.**

El primer dato el producto de las tres edades es 36) lleva a 8 posibles soluciones:

$$1 \times 1 \times 36$$

$$1 \times 2 \times 18$$

$$1 \times 3 \times 12$$

$$1 \times 4 \times 9$$

$$1 \times 6 \times 6$$

$$2 \times 2 \times 9$$

$$2 \times 3 \times 6$$

$$3 \times 3 \times 4$$

El segundo dato (la suma de las edades es el número del portal de enfrente - necesito otro dato) reduce el campo de soluciones a tan solo.

$$1 + 1 + 36 = 38$$

$$1 + 2 + 18 = 21$$

$$1 + 3 + 12 = 16$$

$$1 + 4 + 9 = 14$$

$$1 + 6 + 6 = 13$$

$$2 + 2 + 9 = 13$$

$$2 + 3 + 6 = 11$$

$$3 + 3 + 4 = 10$$

Necesita otro dato porque el número que ve se puede obtener de dos maneras. Cosa que no ocurriría si viese el número 38, o el 21, o el 11. Está viendo el número 13 y, en ese caso, quedan dos posibilidades: 1, 6 y 6 2, 2 y 9 El tercer dato (la mayor toca el piano) hace ver que sólo hay una mayor. El matemático tenía dos gemelas de 2 años y una hija de 9.

Por otra parte es conveniente tener cuidado con las posibles trampas o contaminaciones que pueda encerrar el enunciado, tales como:

- ♦ **Las que desvían la atención.**

Un tren sale de Madrid hacia La Coruña a las 17'30 horas con una velocidad media de 80 km/h. Una hora más tarde sale otro tren de La Coruña hacia Madrid con una velocidad media de 95 km/h. Cuando ambos trenes se cruzan, ¿cuál está más cerca de La Coruña?.

(La proliferación de datos numéricos aleja la atención de la información verdaderamente relevante: "cuando se cruzan").

♦ **Las que transmiten un supuesto implícito.**

Para recorrer un circuito en sentido horario, un caracol tarda sólo 90 minutos, pero cuando lo hace en sentido contrario tarda hora y media. ¿A qué crees que es debida esta diferencia? Analiza la posible forma del circuito.

(Dando por sentado que cantidades expresadas en unidades diferentes, tienen que ser diferentes).

♦ **Las que transmiten una imagen mental.**

Alguien dijo una vez que el tablero de ajedrez tiene 204 cuadrados. ¿Cómo se puede explicar esta afirmación?.

(Potentísima imagen mental la del tablero del ajedrez. Lleva a hacer creer que cuadrado es sinónimo de casilla o escaque).

♦ **Las que transmiten un concepto.**

Una vez, estaban dos pastores tranquilamente en la montaña, cuando se les acercó un forastero que andaba perdido por allí. Empezaron a charlar y, sin darse cuenta, se les hizo la hora de comer. El forastero no llevaba comida, pero los pastores, muy amables, le invitaron gustosamente. Uno de los pastores, Juan, sacó de su zamarra 5 quesos y el otro, Pedro, puso los 3 quesos que llevaba y que eran del mismo tamaño y calidad que los otros cinco. Entre los tres se comieron los ocho quesos. Una vez terminada la comida, el forastero se despidió agradecido de los pastores y quiso recompensarles entregándoles las 8 monedas que llevaba, rogándoles que se las repartieran en compensación por la comida. ¿Cómo deberían repartirse las ocho monedas?.

(La historia construye un fuerte contexto de reparto proporcional que lleva a la inmensa mayoría de los resolutores a contestar que 3 y 8).

Una vez analizado el enunciado y comprendido el problema hasta los linderos de comprensión que el propio problema permita, se pasaría a la segunda fase:

## La concepción de un plan.

Un plan de ejecución del problema. Es decir, cómo lo vamos a hacer.

En este aspecto es preciso asumir el viejo aforismo ajedrecista: es mejor tener un mal plan que no tener ningún plan.

Por lo general, las buenas ideas se basan en las experiencias previas y en los conocimientos adquiridos.

El profesor puede mediante preguntas y sugerencias ir acercando al alumno a la situación que le permita trazar un plan de resolución.

Los comentarios que harán aflorar el plan de trabajo que, tanto en lo que se refiera a su totalidad como en lo que concierna a sus diversas partes, debe ser comentado como ocurrencia y descubrimiento de los alumnos, podrían ser de este estilo:

- ♦ ¿Conoces algún problema relacionado con éste?
- ♦ Trata de pensar en algún problema familiar que tenga la misma incógnita.
- ♦ He aquí un problema relacionado con éste, y ya resuelto, ¿puedes hacer uso de él?
- ♦ ¿Puede enunciarse el problema de forma diferente?
- ♦ Si no puedes resolver el problema, trata de resolver alguno relacionado con él.

Este tipo de orientaciones, los recuerdos de otros problemas ya resueltos, el entorno en el que se mueve el problema y la propia forma de ser del resolutor, desembocarán en la elección de un plan de trabajo, de una estrategia de resolución.

## La ejecución del plan.

Durante el proceso de resolución es conveniente evitar el hacer por hacer. Hay que ser conscientes del porqué hacemos las cosas. De modo que, aún cuando la resolución nos implique afectivamente, debemos reservarnos la capacidad de tomar la suficiente distancia al mismo como para posibilitar la verificación de cada paso.

Para aquellas personas que entienden cada problema como un desafío, una aventura llena de misterios, un enigma a resolver, la ejecución del plan es la aventura en sí misma. Hasta el punto de que, en algunos problemas, llegamos a darnos cuenta de que la solución no es lo más interesante ya que el proceso de resolución puede resultar apasionante y divertido en sí mismo.

Una persona imaginativa, llegará a creer que se adentra en una intrincada selva en la que le acechan todo tipo de peligros. Y al ir avanzando, el camino se bifurcará una y mil veces. ¿Qué camino coger? En ocasiones, se verá muy claro cuál es el sendero que conviene seguir, pero el otro camino nos parecerá más atractivo porque el paisaje que se intuye en su transcurso sea mucho más espectacular.

En cada encrucijada, nos asaltarán la duda y la angustia. La duda, porque no siempre es fácil saber que camino hay que seguir. La angustia, porque elegir un camino supone dejar otro y nunca sabremos qué había al final de un sendero no recorrido. Pero, ¿no queremos que las Matemáticas no se alejen de la vida real? Pues, la vida consiste en eso: en elegir una cosa sabiendo que se dejan otras y que nunca sabremos cómo eran.

Pero, los problemas tienen una ventaja. Y es, que siempre podemos volver sobre los propios pasos e investigar alguna línea secundaria que nos haya parecido interesante. En definitiva, la ejecución del plan adoptado va a requerir que tengamos claras y permanentemente presentes dos cosas: para qué hacemos lo que hacemos y que si un camino no lleva a ninguna salida habrá que dejarlo e iniciar otro.

Además de la "desviación del objetivo" y de la "persistencia en una estrategia errónea", hay otros motivos que explican los posibles errores y bloqueos que pueden surgir en el proceso de resolución de un problema. Pero, ya los consideraremos en otro momento.

### **El examen de la solución obtenida.**

Ya hemos llegado a la solución del problema. ¡Ya está resuelto! La dosis de satisfacción que se recibe es tan elevada que podemos llegar a creer que ya hemos terminado. Pero, no es así.

Resulta muy útil recordar el problema desde el principio. Volver a leer el enunciado y considerar si se ha encontrado lo que se pedía, ayudará a evitar errores referentes a la desviación del objetivo. También puede ayudar a decidir si la respuesta puede ser la correcta o no.

Con preguntas como: ¿cuál era la información importante?, ¿presentaba contradicciones o redundancias?, ¿había información contaminante?, ¿podrías esquematizar el plan seguido?, ¿has seguido ese plan o te has desviado inconscientemente?, ¿has tenido que desviarte voluntariamente para obtener datos complementarios intermedios?, ¿has tenido algún bloqueo o alguna dificultad?

¿cuál?, ¿cómo has conseguido superar ese bloqueo o dificultad?, ¿has encontrado alguna línea secundaria que te gustaría investigar?, ¿la has investigado?, ¿a qué conclusiones te ha llevado?, ¿puedes verificar el resultado?, ¿se puede obtener el resultado de otro modo?, ¿se puede utilizar este método para resolver algún otro problema?, ¿se han empleado todos los datos?, ¿qué conocimientos has utilizado?, ¿qué has aprendido?, ¿qué aspectos de este problema se podrían aplicar a otras situaciones?, se puede realizar una visión retrospectiva que enseñará mucho ya que pondrán de manifiesto las relaciones del problema con otras cuestiones y los lugares en los que han surgido las dificultades.

Si la resolución de un problema es una aventura, los recuerdos de esa aventura es lo que nos irá quedando como bagaje de resolución, y cuantos más problemas resolvamos, mayor práctica tendremos y mejor preparados estaremos para resolver nuevos problemas.